Leçon 246 : Série de Fourier. Exemples et applications.

Développements :

Equation de la chaleur, Théorème de Fejér.

Bibliographie :

Candelpergher, Gourdon, Faraut, OA, Bernis.

Rapport du jury 2017 :

Les différents résultats autour de la convergence (L^2 , Fejér, Dirichlet, . . .) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe C^1 par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et C^1 par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Il est classique d'obtenir des sommes de séries remarquables comme conséquence de ces théorèmes. On peut aussi s'intéresser à la formule de Poisson et à ses conséquences. L'existence d'exemples de séries de Fourier divergentes, associées à des fonctions continues (qu'ils soient explicites ou obtenus par des techniques d'analyse fonctionnelle) peuvent aussi compléter le contenu. Mais il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier. La résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation de la chaleur) peuvent illustrer de manière pertinente cette leçon, mais on peut penser à bien d'autres applications (inégalité isopérimétrique, comportements remarquables des fonctions à spectre lacunaire,. . .).

Rapport de jury 2018 :

Les différents résultats autour de la convergence (L^2, Féjer, Dirichlet, ...) doivent être connus. On prendra garde au sens de la notation $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ (qu'il peut être plus prudent d'éviter en général). Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe C^1 par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et C^1 par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Il est classique d'obtenir des sommes de séries remarquables comme conséquence de ces théorèmes. On peut aussi s'intéresser à la formule de Poisson et à ses conséquences. L'existence d'exemples de séries de Fourier divergentes, associées à des fonctions continues (qu'ils soient explicites ou obtenus par des techniques d'analyse fonctionnelle) peuvent aussi compléter le contenu. Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les cœfficients de Fourier. La résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes avec une estimation de la vitesse de convergence) peuvent illustrer de manière pertinente cette leçon, mais on peut penser à bien d'autres applications (inégalité isopérimétrique, comportements remarquables des fonctions à spectre lacunaire,...).

Remarque 1. *Cadre :On ne considère que des fonctions 1-périodiques, quitte à remplacer $f(x)$ par $f(Tx)$, et on travaille naturellement sur $[0,1[$ qui détermine entièrement la fonction.*

1 Coefficients de Fourier

1.1 Polynômes trigonométriques

Définition 2 (Candel p307)**.** $e_n : x \mapsto exp(2i\pi nx)$.

Définition 3 (Gourdon p256)**.** *Polynôme trigonométrique.*

Proposition 4 (Gourdon p256)**.** *Si P est un polynôme trigonométrique alors il est continu et 1-périodique et $c_n = \int_{[0,1]} P(t)exp(-2i\pi nt)dt$.*

Application 5. *Théorème de Bernstein. Si f est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à n, on a $||f'||_\infty \leq n||f||_\infty$.*

Définition 6 (Gourdon p258)**.** *Série trigonométrique : série de la forme ..., notée.... La série trigonométrique converge si et seulement si la suite des sommes partielles convergent, notée ....*

1.2 Coefficients de Fourier

Remarque 7. *A définir dans L^1.*

Proposition 8 (Candel p307)**.** *Les e_n forment une base hilbertienne de L^2 muni du produit scalaire ...*

Définition 9 (Candel p308)**.** *[Gourdon p258] $c_n(f)$, $a_n(f)$, $b_n(f)$.*

Définition 10 (Gourdon p258)**.** *Série de Fourier.*

Application 11 (Gourdon p258)**.** *Si f est paire (resp impaire), les coefficients b_n (resp a_n) sont nuls.*

Proposition 12 (Gourdon p258)**.** *Relations entre les coefficients de Fourier.*

Proposition 13 (Candel p309)**.** *$l^2(\mathbb{Z})$, muni du produit scalaire ... est un Hilbert.*

Proposition 14 (Candel p310)**.** *La suite des coefficients de f est dans $l^2(\mathbb{Z})$.*

1.3 Propriétés des coefficients de Fourier d'une fonction intégrable

Définition 15 (Candel p312). *$c_n(f)$, $a_n(f)$, $b_n(f)$.*

Définition 16 (Candel p313). *Série de Fourier.*

Proposition 17 (Candel p315). *Nouvelle écriture de la série de Fourier.*

Proposition 18 (Candel p313). *Lemme de Riemann Lebesgue.*

Proposition 19 (Candel p326). *Si f est C^k, $c_n(f) = O(1/|n|^k)$ et relations entre les $c_n(f)$ et les $c_n(f^{(k)})$.*

Application 20 (Candel p315). *Si f est paire (resp impaire), les coefficients b_n (resp a_n) sont nuls.*

Proposition 21 (Gourdon p258). *Relations entre les coefficients de Fourier.*

2 Convergence dans L^2 et aspects hilbertiens

Définition 22 (Candel p308). *Somme partielle de la série de Fourier.*

Remarque 23 (OA p123). *S_n est la projection orthogonale de f sur l'espace vectoriel $P_n = e_{-n}, ..e_{-1}, \vec{e}_0, e_1, .., e_n$, ie sur l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n.*

Corollaire 24. *Pour tout $p \in P_n$, $||f - S_n||_2 \leq ||f - p||_2$.*

Proposition 25 (Candel p308). *La suite des sommes partielles converge dans L^2 vers f, ie la somme de la série de Fourier de f est égale à f. La série de Fourier converge dans L^2.*

Proposition 26 (Candel p310). *Egalité de Parseval.*

Théorème 27 (Candel p311). *Théorème d'isomorphisme de Riesz.*

Remarque 28. *Si on utilise l'intégrale de Riemann ici, ce n'est plus un isomorphisme car $(L^2, ||||_2^R)$ n'est pas complet.*

Exemple 29 (Candel p318). *[Gourdon p259] $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^4}$.*

3 Convergences normale et ponctuelle des séries de Fourier

3.1 Séries ponctuellement divergentes

Proposition 30 (Candel p315). *Série d'un élément de L^2 qui diverge sur un ensemble de points dense dans $[0, 1]$.*

Proposition 31 (Candel p316). *Kolmogorov. Il existe des fonctions dans L^1 telle que la suite des sommes partielles diverge en tout point de $[0, 1]$.*

3.2 Convergence normale

Proposition 32 (Candel p316). *[Faraut] Théorème de convergence normale.*

Proposition 33. *Si $f \in C^0 \cap C^1_m$ alors $\sum |c_n(f)|$ converge.*

Corollaire 34 (Candel p317). *Convergence normale dans le cas où f est C^1.*

Exemple 35 (Candel p317). *Cacul d'une somme avec $f(x) = x(1 - x)$.*

3.3 Convergence simple et noyau de Dirichlet

Définition 36 (Candel p319). *Noyau de Dirichlet.*

Proposition 37 (Candel p319). *$S_n(f) = D_n * f$.*

Théorème 38 (Candel p319). *Théorème de Dirichlet.*

Contre exemple 39 (Candel p319). *Phénomène de Gibbs. Il n'y a convergence uniforme sur aucun intervalle contenant 0.*

Exemple 40. *Avec 1 sur $[0, 1]$ prolongée par imparité, on trouve ...*
Avec t sur $[0, 1]$ prolongée par imparité, on trouve ...
Avec t^2 sur $[0, 1]$ prolongée par imparité, on trouve ...

4 Régularité

Remarque 41 (Candel p325). *On considère l'application linéaire et continue $F : L^1 \to c_o(\mathbb{Z}), f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$.*

Proposition 42 (Candel p325). *$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.*

Proposition 43 (Candel p327). *Si f est continue périodique, et vérifie $c_n(f) = O(1/|n|^k)$ alors f est de classe C^{k-2}.*

Proposition 44 (Candel p328). *$F_\infty : C^\infty \to s(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme, où $s(\mathbb{Z})$ est l'espace des suites telles que $c_n = O(1/|n|^k)$ pour tout $k \geq 0$.*

5 Convergence au sens de Cesàro et noyau de Fejer

Définition 45 (Candel p330). *Noyau de Féjer.*

Proposition 46 (Candel p330). *Pour tout $x \in [0, 1]$, $(1/n + 1)S_n(f)(x) = F_n * f(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n * f(x)$ converge vers la limite au sens de Cesaro de $S_n(f)(x)$.*

Proposition 47. *Le noyau de Fejer est une suite d'approximations de l'unité.*

Contre exemple 48. *Le noyau de Dirichlet n'en est pas une.*

Théorème 49 (Candel p334)**.** *Théorème de Fejer. Soit $f \in L^1$, 1 périodique.*
En tout point de continuité de f, $F_n * f(x)$ tend vers $f(x)$.
Si f est continue, la convergence est uniforme.
On a la convergence dans L^1.

Application 50 (Candel p334)**.** *Weierstrass. L'espace des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble des fonctions continues et périodiques sur $[0, 1]$, muni de la norme infinie.*

Application 51 (Candel p334)**.** *On retrouve la propriété d'injectivité.*

Proposition 52 (Candel p334)**.** *Caractérisation par moyenne de Cesaro.*

6 Applications : Séries de Fourier et EDP

Proposition 53 (Bernis)**.** *Résolution de l'équation de la chaleur.*